Variable Compleja I
Examen XI

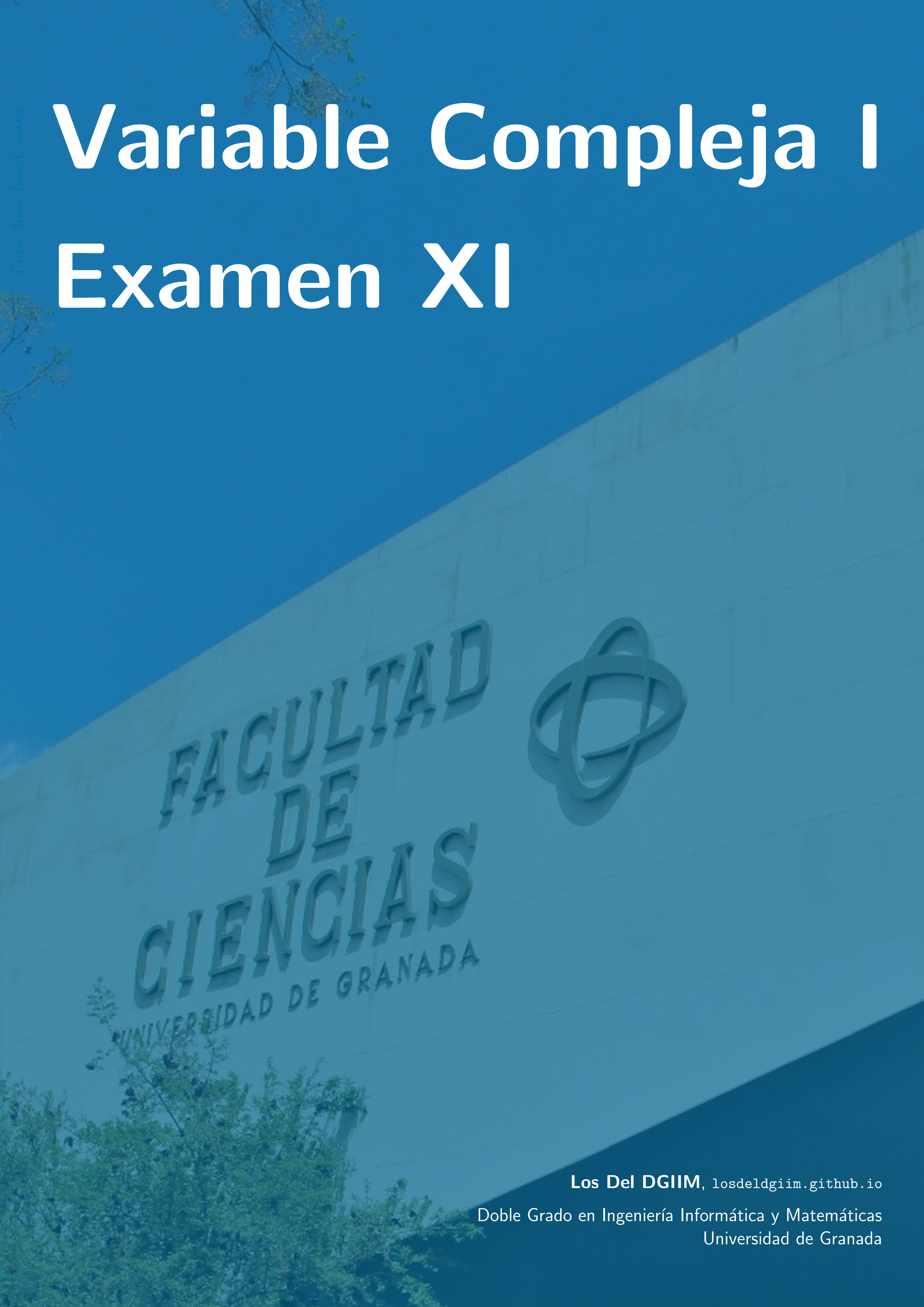

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Variable Compleja I
Examen XI

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Variable Compleja I.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Javier Merí de la Maza.

Descripción Prueba Intermedia de Incidencias (Se hizo otro día por el apagón generalizado en España).

Fecha 6 de Mayo de 2025.

Duración 120 minutos.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}$ converge absolutamente en todo punto de $D(0,1)$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $D(0,1)$. Calcular $\int_{C(0,1/2)} f(z)\,dz$ donde $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}$.

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \cos(\overline{z}) \qquad g(z) = z^2 f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejercicio 3.

1. [**1.5 puntos**] Calcular la siguiente integral:

$$\int_{C(0,3)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z(z+1)^2}\,dz$$

2. [**1.5 puntos**] Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. [**1.5 puntos Extra**] Probar que, de hecho, $f = g$.

Ejercicio 1 (3.5 puntos)**.** Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}$ converge absolutamente en todo punto de $D(0,1)$ y uniformemente en cada subconjunto compacto contenido en $D(0,1)$. Calcular $\displaystyle\int_{C(0,1/2)} f(z)\,dz$ donde $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ viene dada por $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}$.

Estudiamos en primer la convergencia uniforme. Sea $K \subset D(0,1)$ no vacío y compacto. Entonces existe $r \in [0,1[$ tal que $|z| \leqslant r < 1$ para todo $z \in K$. Entonces:

$$\left|\frac{z^n}{1-z^{n+1}}\right| \leqslant \frac{|z|^n}{|1-|z|^{n+1}|} = \frac{|z|^n}{1-|z|^{n+1}} \leqslant \frac{r^n}{1-r^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in K$$

Aplicamos ahora el criterio del cociente para series, usando que $r < 1$:

$$\left\{\frac{r^{n+1}}{1-r^{n+2}} \cdot \frac{1-r^{n+1}}{r^n}\right\} = \left\{r \cdot \frac{1-r^{n+1}}{1-r^{n+2}}\right\} \to r \cdot 1 = r < 1$$

Por el Criterio del Cociente, la serie siguiente es convergente.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{r^n}{1-r^{n+1}}$$

Por tanto, por el Test de Weierstrass, la serie del enunciado converge uniformemente en K.

Para la convergencia absoluta, consideramos $z \in D(0,1)$ fijo. Como $\{z\}$ es compacto, por el Test de Weierstrass tenemos que converge absolutamente en $\{z\}$. Como z es arbitrario, tenemos que la serie converge absolutamente en todo punto de $D(0,1)$.

Para calcular la integral, veamos que converge uniformemente en $C(0,1/2)^*$. Como la parametrización de la curva $C(0,1/2)$ es una función continua definida en el compacto $[-\pi,\pi]$, sabemos que $C(0,1/2)^*$ es compacto, y por lo visto anteriormente, la serie converge uniformemente en $C(0,1/2)^*$. Por tanto, podemos intercambiar la integral y la suma:

$$\int_{C(0,1/2)} f(z)\,dz = \int_{C(0,1/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C(0,1/2)} \frac{z^n}{1-z^{n+1}}\,dz = 0$$

donde en la última igualdad hemos usado que el integrando es una función racional, luego holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, y por el Teorema Local de Cauchy, la integral es cero.

Ejercicio 2 (3.5 puntos)**.** Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$f(z) = \cos(\overline{z}) \qquad g(z) = z^2 f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Estudiamos primero la función f. En vistas a aplicar el Teorema de Cauchy-Riemann, definimos $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(x+iy) = \cos(x)\cosh(-y) \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(x+iy) = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(-y) \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales de u y v:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= -\operatorname{sen}(x)\cosh(-y)\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\cos(x)\operatorname{senh}(-y)\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= -\cos(x)\operatorname{senh}(-y)\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \operatorname{sen}(x)\cosh(-y)
\end{aligned}$$

La primera condición de Cauchy-Riemann se cumple si y sólo si:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \iff \operatorname{sen}(x)\cosh(-y) = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = 0$$

La segunda condición de Cauchy-Riemann se cumple si y sólo si:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \iff \cos(x)\operatorname{senh}(-y) = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} \cos(x) = 0 \\ \vee \\ \operatorname{senh}(-y) = 0 \end{array}\right.$$

Para que se cumplan ambas condiciones, es necesario que se cumpla que $y = 0$ y $\operatorname{sen}(x) = 0$; es decir, $z \in \pi\mathbb{Z}$. Por tanto, f es holomorfa en $\pi\mathbb{Z}$ y no es holomorfa en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ahora, estudiamos la función g. Fijado $z \in \mathbb{C}$, distinguimos en función del valor de z:

- Si $z \in \pi\mathbb{Z}$:

  En este caso, f es derivable en z y por tanto g también lo es.

- Si $z \notin \pi\mathbb{Z}$:

  En particular, $z \neq 0$. Entonces:

  $$f(z) = \frac{g(z)}{z^2}$$

  Supuesto que g es derivable en z, entonces f también lo es. Pero como $z \notin \pi\mathbb{Z}$, f no es derivable en z. Por tanto, g no es derivable en z.

Por tanto, g es derivable en $\pi\mathbb{Z}$ y no lo es en ningún otro punto de $\mathbb{C}$.

Ejercicio 3.

1. [**1.5 puntos**] Calcular la siguiente integral:

   $$\int_{C(0,3)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z(z+1)^2}\,dz$$

   Descomponemos la fracción en funciones simples:

   $$\frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{(z+1)^2} = \frac{A(z+1)^2 + Bz(z+1) + Cz}{z(z+1)^2}$$

- Si $z = 0$, entonces $1 = A$.
- Si $z = -1$, entonces $1 = -C \Longrightarrow C = -1$.
- Igualando los coeficientes de z^2, se tiene que $A + B = 0 \Longrightarrow B = -1$.

Como la función seno es entera, podemos aplicar la fórmula de Cauchy para la circunferencia y para las derivadas:

$$\begin{aligned}
\int_{C(0,3)} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z(z+1)^2}\,dz &= \int_{C(0,3)} \left(\frac{\operatorname{sen}(z)}{z} - \frac{\operatorname{sen}(z)}{z+1} - \frac{\operatorname{sen}(z)}{(z+1)^2} \right) dz \\
&= 2\pi i \cdot (\operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}(-1) - \operatorname{sen}'(-1)) \\
&= 2\pi i \cdot (0 - \operatorname{sen}(-1) - \cos(-1)) \\
&= 2\pi i \cdot (\operatorname{sen} 1 - \cos 1)
\end{aligned}$$

2. **[1.5 puntos]** Sean f y g dos funciones enteras verificando $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \mathbb{T}$. Demostrar que $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

   Como son funciones enteras, para cada $z \in D(0,1)$ se tiene por la fórmula de Cauchy para la circunferencia que:

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{g(w)}{w-z}\,dw = g(z)$$

   Además, para cada $z \in \mathbb{T}$ también se tiene por hipótesis que $f(z) = g(z)$. Por tanto, $f(z) = g(z)$ para cada $z \in \overline{D}(0,1)$.

3. **[1.5 puntos Extra]** Probar que, de hecho, $f = g$.

   Si consideramos las restricciones a $\Omega = \overline{D}(0,1)$, se tiene que:

   $$f_{|\Omega} = g_{|\Omega}$$

   Por el carácter local de la derivabilidad, se tiene que:

   $$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Por otro lado, como f, g son funciones enteras, por el Teorema de Cauchy son analíticas en $\mathbb{C}$. De hecho, considerando el desarrollo de taylor centrado en el origen, se tiene que:

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = g(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$